ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Présidence du Concours National Commun 2010
École Supérieure des Industries du Textile et de l'Habillement
ESITH

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs ou Assimilées

Session 2010

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES I

Durée 4 heures

Filière **MP**

Cette épreuve comporte 4 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière MP,
comporte 4 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Étude de l'équation de la chaleur

Notations et objet du problème

Dans ce problème, $\mathbb{R}^n$ sera muni de sa norme euclidienne canonique notée $\|.\|$, n étant un entier $\geqslant 1$. L'adhérence d'une partie A de $\mathbb{R}^n$ se notera $\overline{A}$.

Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, on note $\mathcal{C}^1(I)$ l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans ; de même si $\mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{C}^2(\mathcal{U})$ désigne l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}$; enfin, si $\mathcal{A}$ est une partie de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ est l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}$.

Pour tout réel $R > 0$, on considère les parties Λ_R, Ω_R et Γ_R de $\mathbb{R}^2$ définies par

$$\Lambda_R := \{(x,R) \; ; \; 0 < x < \pi\}, \quad \Omega_R :=]0,\pi[\times]0,R[\quad \text{et}$$

$$\Gamma_R := \{(0,t) \; ; \; 0 \leqslant t \leqslant R\} \cup \{(x,0) \; ; \; 0 \leqslant x \leqslant \pi\} \cup \{(\pi,t) \; ; \; 0 \leqslant t \leqslant R\}.$$

On se propose de résoudre le problème suivant :
Étant donnée un réel $R > 0$ et une fonction $\psi \in \mathcal{C}^1([0,\pi])$ telle que $\psi(0) = \psi(\pi) = 0$, il existe une unique fonction $F : \overline{\Omega}_R \longrightarrow \mathbb{R}$ continue vérifiant

$$(1) \quad \begin{cases} \text{(i)} \quad F \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \Omega_R \text{ et } \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \dfrac{\partial F}{\partial t} = 0 \quad \text{sur } \Omega_R \; ; \\ \text{(ii)} \quad \forall\, t \in [0,R], \quad F(0,t) = F(\pi,t) = 0 \; ; \\ \text{(iii)} \quad \forall\, x \in [0,\pi], \quad F(x,0) = \psi(x). \end{cases}$$

Les trois parties du problèmes sont largement indépendantes ; seul le résultat de la question **1.2.** *est utile dans la troisième partie.*

1ère partie
Résultats préliminaires

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U})$. Pour tout $x \in \mathcal{U}$, on note H_x la matrice *hessienne* de f au point x, c'est l'élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $H_x = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, et on pose $\Delta f(x) = \mathrm{Tr}\,(H_x),\ x \in \mathcal{U}$; Δf est le *laplacien* de f.

1.1. Soit $x \in \mathcal{U}$; montrer que la matrice H_x est orthogonalement diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1.2. On suppose que f présente un maximum local en un point $a \in \mathcal{U}$ et on note Q_a la forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ canoniquement associée à la matrice H_a.

1.2.1. Montrer que lorsque h tend vers 0 dans $\mathbb{R}^n$, $f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2} Q_a(h) + \circ(\|h\|^2)$.

1.2.2. Soit $u \in \mathbb{R}^n$ avec $u \neq 0$.

1.2.2.1. Montrer que pour t voisin de 0 dans $\mathbb{R}$, $t^2 Q_a(u) + \circ(t^2) \leqslant 0$.

1.2.2.2. En déduire que la forme quadratique Q_a est négative.

1.2.3. Montrer que les termes diagonaux de H_a sont négatifs. Préciser le signe de $\Delta f(a)$.

1.3. Application aux fonctions harmoniques

On pose $K := \{x \in \mathbb{R}^n \; ; \; \|x\| \leqslant 1\}$ et on suppose dans cette question que $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U}) \cap \mathcal{C}(K)$ où $\mathcal{U} = \{x \in \mathbb{R}^n \; ; \; \|x\| < 1\}$.

Définition : f est dite *harmonique* sur $\mathcal{U}$ si son laplacien Δf est nul sur $\mathcal{U}$.

1.3.1. Justifier que f est bornée sur K et qu'elle atteint ses bornes.

1.3.2. Si $\Delta f > 0$ sur $\mathcal{U}$, montrer que f ne peut pas atteindre son maximum sur K en un point de l'intérieur de K ; en déduire que

$$\sup_{\|x\| \leqslant 1} f(x) = \sup_{\|y\|=1} f(y).$$

1.3.3. Si f est harmonique sur $\mathcal{U}$.

1.3.3.1. À tout $\varepsilon > 0$, on associe la fonction $f_\varepsilon : x \longmapsto f(x) + \varepsilon \|x\|^2$, définie sur K. Justifier que $f_\varepsilon \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U}) \cap \mathcal{C}(K)$ et calculer le laplacien de f_ε en fonction de celui de f.

1.3.3.2. En déduire que pour tout $x \in K$, $f(x) \leqslant \sup_{\|y\|=1} f(y)$.

1.3.3.3. Vérifier que $-f$ est aussi harmonique sur $\mathcal{U}$ et déduire de ce qui précède que pour tout $x \in K$,

$$\inf_{\|z\|=1} f(z) \leqslant f(x).$$

2ème partie

Construction d'une solution du problème

Dans la suite du problème, on considère une fonction $\psi \in \mathcal{C}^1([0,\pi])$ telle que $\psi(0) = \psi(\pi) = 0$. On prolonge ψ en une application notée $\widetilde{\psi} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, impaire et $2\pi-$périodique, et on lui associe la suite réelle $(b_p)_{p \geqslant 1}$ ainsi que la suite de fonctions $(v_p)_{p \geqslant 1}$, définies par

$$b_p := \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \psi(t) \sin(pt)\, dt \quad \text{et} \quad v_p(x,t) = b_p \sin(px)\, e^{-p^2 t}, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } p \in \mathbb{N}^*.$$

2.1. Préciser l'expression de $\widetilde{\psi}(x)$ pour $x \in [-\pi, 0]$ puis pour $x \in [\pi, 3\pi]$, et montrer que $\widetilde{\psi} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

2.2. Exprimer, pour tout entier $p \geqslant 1$, le coefficient de Fourier trigonométrique $b_p(\widetilde{\psi})$ en fonction de b_p. Que vaut le coefficient de Fourier $a_p(\widetilde{\psi})$ pour tout $p \in \mathbb{N}$?

2.3. Montrer que la série $\sum_{p \geqslant 1} b_p$ est absolument convergente.

2.4. Montrer que la série de fonctions $\sum_{p\geqslant 1} v_p$ est normalement convergente sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ et que sa somme $f : (x,t) \longmapsto \sum_{p=1}^{+\infty} v_p(x,t)$ y est continue.

2.5. Justifier que pour tout entier $p \geqslant 1$, la fonction v_p est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ et que $\frac{\partial^2 v_p}{\partial x^2} - \frac{\partial v_p}{\partial t} = 0$

2.6. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, les séries de fonctions $\sum_{p\geqslant 1} p^k v_p$ et $\sum_{p\geqslant 1} p^k \frac{\partial v_p}{\partial x}$ convergent normalement sur $\mathbb{R} \times [a, +\infty[$ pour tout $a > 0$.

2.7. Montrer soigneusement que la fonction f, définie ci-dessus, possède en tout point de $\mathbb{R}\times]0, +\infty[$ une dérivée partielle par rapport à x et exprimer $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$, pour $(x,t) \in \mathbb{R}\times]0, +\infty[$, sous la forme de la somme d'une série. Justifier que cette dérivée partielle est continue sur l'ouvert $\mathbb{R}\times]0, +\infty[$.

2.8. Montrer de même que la fonction f possède en tout point de $\mathbb{R}\times]0, +\infty[$ une dérivée partielle par rapport à t et l'exprimer sous la forme de la somme d'une série. Justifier que cette dérivée partielle est continue sur l'ouvert $\mathbb{R}\times]0, +\infty[$.

2.9. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $\mathbb{R}\times]0, +\infty[$ et que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}\times]0, +\infty[.$$

2.10. Montrer que pour tout $R > 0$, la restriction de f à $\overline{\Omega}_R$ est solution du problème posé.

3ème partie
Unicité de la solution

Pour traiter cette partie, il peut être utile d'exploiter la figure du bas de la dernière page.
On considère $R > 0$ et $F : \overline{\Omega}_R \longrightarrow \mathbb{R}$ continue ; on suppose que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω_R.

3.1. Un résultat utile : Soit $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

3.1.1. Si g est dérivable sur $]a, b]$ et est telle que $g(t) \leqslant g(b)$ pour tout $t \in]a, b]$, montrer que $g'(b) \geqslant 0$.

3.1.2. Si g est deux fois dérivable sur $]a, b[$ et présente un maximum local en $x_0 \in]a, b[$, montrer que $g'(x_0) = 0$ et que $g''(x_0) \leqslant 0$.

3.2. Soit $r \in]0, R[$.

3.2.1. Justifier que F est bornée sur $\overline{\Omega}_r$ et qu'il existe $(x_0, t_0) \in \overline{\Omega}_r$ tel que

$$F(x_0, t_0) = \sup_{(x,t)\in\overline{\Omega}_r} F(x,t).$$

3.2.2. Si $(x_0, t_0) \in \Omega_r$, justifier que $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, t_0) = \frac{\partial F}{\partial t}(x_0, t_0) = 0$ et que $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0, t_0) \leqslant 0$.

3.2.3. Si $(x_0,t_0)\in\Lambda_r$, justifier que $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0,t_0)\leqslant 0$ et que $\dfrac{\partial F}{\partial t}(x_0,t_0)\geqslant 0$. (On pourra considérer les fonctions $x\longmapsto F(x,r)$ définie sur $]0,\pi[$ et $t\longmapsto F(x_0,t)$ définie sur $]0,r]$.)

3.2.4. En déduire que si $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}-\dfrac{\partial F}{\partial t}>0$ sur Ω_R alors $(x_0,t_0)\in\Gamma_r$.

3.3. On suppose dans cette question que $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}-\dfrac{\partial F}{\partial t}>0$ sur Ω_R et on considère une suite $(r_p)_{p\geqslant 1}$ d'éléments de l'intervalle $]0,R[$ qui **croit** vers R ; d'après ce qui précède, il existe, pour chaque entier $p\geqslant 1$, un point $z_p=(x_p,t_p)$ de Γ_{r_p} tel que $F(x_p,t_p)=\sup\limits_{(x,t)\in\overline{\Omega}_{r_p}} F(x,t)$.

3.3.1. Justifier qu'on peut extraire de la suite $(z_p)_{p\geqslant 1}$ une sous-suite $(z_{\sigma(p)})_{p\geqslant 1}$ qui converge vers un point $z=(x^*,t^*)$ de Γ_R, puis montrer que la suite image $\big(F(z_{\sigma(p)})\big)_{p\geqslant 1}$ croit vers $F(z)$.

3.3.2. En déduire que pour tout $(x,t)\in[0,\pi]\times[0,R[$, $F(x^*,t^*)\geqslant F(x,t)$ puis étendre cette inégalité à tout $(x,t)\in\overline{\Omega}_R$.

3.4. On suppose dans cette question que $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}-\dfrac{\partial F}{\partial t}\geqslant 0$ sur Ω_R. Pour tout entier $p\geqslant 1$, posons

$$F_p(x,t):=F(x,t)+\frac{x^2}{p},\quad (x,t)\in\overline{\Omega}_R.$$

3.4.1. Vérifier que pour tout entier $p\geqslant 1$, $F_p\in\mathcal{C}(\overline{\Omega}_R)\cap\mathcal{C}^2(\Omega_R)$ et que $\dfrac{\partial^2 F_p}{\partial x^2}-\dfrac{\partial F_p}{\partial t}>0$ sur Ω_R.

3.4.2. En déduire que pour tout entier $p\geqslant 1$, il existe $(x_p,t_p)\in\Gamma_R$ tel que

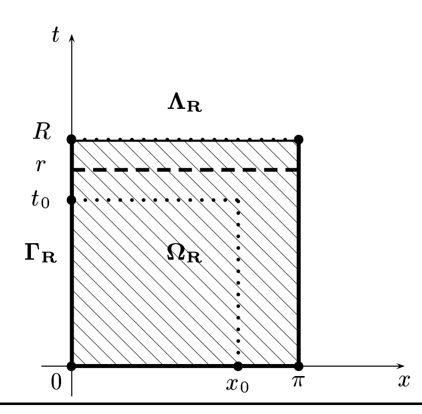
$$F_p(x_p,t_p)=\sup_{(x,t)\in\overline{\Omega}_R} F_p(x,t).$$

3.4.3. Déduire de ce qui précède qu'il existe $(x^*,t^*)\in\Gamma_R$ tel que $F(x^*,t^*)=\sup\limits_{(x,t)\in\overline{\Omega}_R} F(x,t)$.

(Considérer, après en avoir justifié l'existence, une sous-suite convergente de la suite $\Big((x_p,t_p)\Big)_{p\geqslant 1}$.)

3.5. On suppose que F est nulle sur Γ_R et que $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}-\dfrac{\partial F}{\partial t}=0$ sur Ω_R. Montrer que F est nulle sur $\overline{\Omega}_R$. (On pourra appliquer le résultat qui précède à F et à $-F$.)

3.6. Soit $f_1:\overline{\Omega}_R\longrightarrow\mathbb{R}$, continue et vérifiant les conditions (i), (ii) et (iii) de (1). La fonction f étant celle définie dans la deuxième partie, vérifier que la fonction $G:=f_1-f$ satisfait les hypothèses de la question ci-dessus et conclure que $f_1=f$.



FIN DE L'ÉPREUVE